

# 离散数学

## 第十一章: 组合计数

卢杨

厦门大学信息学院计算机科学与技术系

[luyang@xmu.edu.cn](mailto:luyang@xmu.edu.cn)



# 组合计数

- 组合数学的一个重要的研究领域是组合计数，它在算法的设计与分析中有着重要的应用.
- 最基本的组合数学的思想和枚举的方法在古老时代就已经出现.
  - 公元前6世纪的古印度外科医生妙闻已经指出可以由6个相异的味道组合出63种相异的结果.
- 公元850年的印度数学家Mahāvīra提供了关于排列数与组合的公式，甚至可能早在6世纪印度的数学家就对这些公式熟悉.
- 在20世纪下半叶，组合数学成长相当快速，甚至出现数十种新的期刊和会议. 在某种程度上，这样的成长是由对其他领域的连结与应用所带动，包括代数，概率论，泛函分析和数论等.



## 11.1 排列与组合

# 加法法则

## 加法法则

事件 $A$ 有 $m$ 种产生方式, 事件 $B$ 有 $n$ 种产生方式, 则事件“ $A$ 或 $B$ ”有 $m + n$ 种产生方式.

- 加法法则的使用条件是: 事件 $A$ 与 $B$ 产生的方式是**不重叠的**. 如果有某种产生方式既是事件 $A$ 的产生方式, 也是事件 $B$ 的产生方式, 那么事件“ $A$ 或 $B$ ”的产生方式数不等于 $m + n$ .
- 加法法则可以推广到 $k$ 种事件的情况, 即: 事件 $A_1$ 有 $n_1$ 种产生方式, 事件 $A_2$ 有 $n_2$ 种产生方式, ..., 事件 $A_k$ 有 $n_k$ 种产生方式, 则事件“ $A_1$ 或 $A_2$ 或... $A_k$ ”有 $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ 种产生的方式.



# 加法法则

**例** 汽车市场有10款轿车, 7款SUV, 从市场中只购买一辆车, 有多少种购买方式?

**解** 这里用到了加法原则, 如果只能买一辆车的话, 两种车只能买一种, 两个事件是不能重叠的. 因此一共  $10 + 7$  种购买方式.

**例** 汽车市场有10款轿车, 3款奥迪, 从市场中只购买一辆车, 有多少种购买方式?

**解** 这里两种车可能是有重叠的, 例如买了A4L相当于既买了奥迪又买了轿车, 因此无法使用加法原则.



# 乘法法则

## 乘法法则

事件 $A$ 有 $m$ 种产生方式，事件 $B$ 有 $n$ 种产生方式，则事件“ $A$ 与 $B$ ”有 $mn$ 种产生方式。

- 乘法法则的使用条件是：事件 $A$ 与 $B$ 产生的方式是**相互独立的**。如果事件 $A$ 的产生方式和事件 $B$ 的产生方式是相互影响的，那么事件“ $A$ 与 $B$ ”的产生方式数不等于 $mn$ 。
- 乘法法则可以推广到 $k$ 种事件的情况，即：事件 $A_1$ 有 $n_1$ 种产生方式，事件 $A_2$ 有 $n_2$ 种产生方式， $\dots$ ，事件 $A_k$ 有 $n_k$ 种产生方式，则事件“ $A_1$ 与 $A_2$ 与 $\dots A_k$ ”有 $n_1 n_2 \dots n_k$ 种产生的方式。



# 乘法法则

**例 11.1** 设 $A, B, C$ 是3个城市, 从 $A$ 到 $B$ 有3条道路, 从 $B$ 到 $C$ 有2条道路, 从 $A$ 直接到 $C$ 有4条道路, 问从 $A$ 到 $C$ 有多少种不同的方式?

**解** 将从 $A$ 到 $C$ 的道路分成两类: 经过 $B$ 的与不经过 $B$ 的. 把经过 $B$ 的道路分成两步选择:

- 先选从 $A$ 到 $B$ 的, 有3种; 再选从 $B$ 到 $C$ 的, 有2种, 根据乘法法则, 经过 $B$ 的道路有 $3 \times 2 = 6$ 条.
- 而从 $A$ 直接到 $C$ 的有4条, 再使用加法法则, 不同的方式数是:

$$3 \times 2 + 4 = 10$$

# 乘法法则

**例** 一个大学生每天白天可进行的活动的有上课, 运动, 社团活动会, 晚上可进行的活动的有自习, 娱乐, 约会. 但是如果白天上课了, 晚上就需要适当放松一下. 那么这个大学生的一天有几种过法?

**解** 由于白天上课和晚上自习这两个事件**不是独立的**, 晚上是否上自习与白天是否有课相关. 因此无法使用乘法法则. 需要进行分类讨论:

- 白天不上课: 白天2种过法  $\times$  晚上3种过法 = 6种;
- 白天上课: 白天1种过法  $\times$  晚上2种过法 = 2种.
- 共计8种, 小于乘法法则得到的  $3 \times 3 = 9$  种.





# 加法法则和乘法法则

- 加法法则的本质是**分类选取**: 将所有的选法分成若干类, 只能选其中一类, 各类选法**互不重叠**, 分别计数每类的选法个数, 然后使用加法法则.
- 乘法法则的本质是**分步选取**: 将选择过程分成若干步, 每步都必须要进行, 而且选择**彼此独立**, 分别计数每步的选择数目, 然后使用乘法法则.
- 上例中先把从A到C的道路根据是否经过B分成两类, 对于经过B的道路再分A到B和B到C两段进行分步选取.



# 计数公式

- 集合的排列与组合是不允许重复选取的基本计数模型。

## 定义 11.1

设 $S$ 是 $n$ 元集.

(1) 从 $S$ 中**有序选取**的 $r$ 个元素称为 $S$ 的一个 **$r$ 排列**,  $S$ 的不同 $r$ 排列总数记作 $P(n, r)$ .  $r = n$ 的排列称作 $S$ 的**全排列**, 或简称为 $S$ 的**排列**.

(2) 从 $S$ 中**无序选取**的 $r$ 个元素称为 $S$ 的一个 **$r$ 组合**,  $S$ 的所有 $r$ 组合的总数记作 $C(n, r)$ .



# 计数公式

## 定理 11.1

设 $n, r$ 为自然数, 规定 $0! = 1$ , 则

$$(1) P(n, r) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-r)!} & n \geq r \\ 0 & n < r \end{cases}$$

$$(2) C(n, r) = \begin{cases} \frac{P(n, r)}{r!} & n \geq r \\ 0 & n < r \end{cases}$$



# 计数公式

**证明** 若 $n < r$ , 显然不存在 $S$ 的 $r$ 排列和 $r$ 组合. 只需要考虑 $n \geq r$ 的情况.

(1) 从 $S$ 中选择排列的第一个元素有 $n$ 种选法, 从剩下的 $n - 1$ 个中选择第二个元素有 $n - 1$ 种选法. 类似地, 第 $r$ 个元素有 $n - r + 1$ 种.

每种选择之间相互独立, 根据乘法法则, 总选法数为

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}.$$

(2) 分两步构成 $r$ 排列, 先从 $S$ 中选出 $r$ 个元素有 $C(n, r)$ 种方法, 然后对这 $r$ 个元素做全排列有 $r!$ 种方法.

这两种方法之间相互独立, 根据乘法法则,  $r$ 排列的选法数为

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot r!$$
$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$$



# 计数公式

## 推论

元素依次排成一个圆环的排列称为**环排列**， $n$ 元集 $S$ 的 $r$ 环排列数是 $P(n, r)/r$ 。  
当 $r = n$ 时， $S$ 的环排列数为 $(n - 1)!$ 。

**证明** 对于每个 $r$ 环排列 $a_1, a_2, \dots, a_r$ ，如果从两个相邻元素之间断开，就得到普通的 $r$ 排列。

因为断开的位置有 $r$ 种， $r$ 个不同 $r$ 排列对应同一个环排列，于是 $r$ 环排列数为 $P(n, r)/r$ 。

当 $r = n$ 时， $S$ 的换排列数为 $\frac{P(n, n)}{n} = \frac{n!}{n} = (n - 1)!$ 。

- 环排列的本质就是谁打头都一样， $r$ 排列中共有 $r$ 种不同的打头方式，所以除以 $r$ 。



# 计数公式

例 11.2 (1) 10个男孩与5个女孩站成一排, 如果没有女孩相邻有多少种排法? 如果排成一个圆圈且没有女孩相邻, 问有多少种方法?

解 分步选取. 先对10个男孩做全排列 $P(10,10)$ .

然后再把女孩塞到男孩的间隔中, 共11个位置, 其中选出5个位置, 方法数是 $P(11,5)$ . 根据乘法法则可得:

$$P(10,10) \times P(11,5) = 10! \times \frac{11!}{6!}$$

排成一个圆圈就是环排列, 先对10个男孩做环排列得 $P(10,10)/10$ . 此时只有10个间隔, 其中选出5个是 $P(10,5)$ . 根据乘法法则可得:

$$\frac{P(10,10)}{10} \times P(10,5) = 9! \times \frac{10!}{5!}$$



## 计数公式

**例 11.2 (2)** 从 $1, 2, \dots, 300$ 中任取3个不同的数使得其和能被3整除, 问有多少种方法?

**解** 将集合 $\{1, 2, \dots, 300\}$ 按照除以3的余数分为 $A, B, C$ 三个子集, 其中

$$A = \{3, 6, 9, \dots, 300\}, B = \{1, 4, 7, \dots, 298\}, C = \{2, 5, 8, \dots, 299\}$$

若使得选出的3个数 $i, j, k$ 之和能被3整除, 只有2种选法:

- 3个数取自同一子集: 根据加法法则, 方法数为 $3C(100, 3)$ .
- 3个数分别取自不同的子集: 根据乘法法则, 方法数为 $100^3$ .

最后再使用加法法则得到 $3C(100, 3) + 100^3 = 1485100$ .



# 计数公式

例 11.3 (1) 设 $S$ 为3元集,  $S$ 上可以定义多少个不同的二元运算和一元运算? 其中有多少个二元运算是可交换的? 有多少个二元运算是幂等的? 有多少个二元运算是可交换并且幂等的?

解

- 3元集上的二元运算的运算表有9个位置, 每个位置可以选择3种值, 根据乘法法则有 $3^9 = 19683$ 个二元运算.
- 一元运算表只有3个位置, 于是有 $3^3 = 27$ 个一元运算.
- 可交换的二元运算表除了主对角线元素之外, 其他元素关于主对角线成对称分布, 因此能独立取值的位置只有运算表上半三角的3个位置和对角线的3个位置, 共6个位置, 于是有 $3^6 = 729$ 个可交换的二元运算.
- 幂等的二元运算表中的主对角线是确定的, 其余6个位置可以独立取值, 于是有 $3^6 = 729$ 个幂等的二元运算.
- 可交换且幂等的二元运算表中可独立选择的只剩下3个, 于是有 $3^3 = 27$ 个.





# 计数公式

例 11.3 (2) 设 $S$ 为 $n$ 元集,  $S$ 上可以定义多少个不同的二元运算和一元运算? 其中有多少个二元运算是可交换的? 有多少个二元运算是幂等的? 有多少个二元运算是可交换并且幂等的?

解 和(1)用相同的分析方式.

- 二元运算有 $n^{n^2}$ 个, 一元运算有 $n^n$ 个.
- 可交换的二元运算有 $n^{n^2 - \frac{n(n-1)}{2}} = n^{\frac{n^2+n}{2}}$ 个.
- 幂等的二元运算有 $n^{n^2-n}$ 个.
- 可交换且幂等的二元运算有 $n^{\frac{n^2-n}{2}}$ 个.



# 多重集的计数公式

## 定义

元素可以多次出现的集合成为**多重集**, 元素 $a_i$ 出现的次数叫做它的**重复度**, 记作 $n_i$ ,  $n_i = 0, 1, \dots, \infty$ . 含有 $k$ 种元素的多重集可记作 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ .

## 定义 11.2

- (1) 从多重集 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 中**有序选取**的 $r$ 个元素称为 $S$ 的一个 **$r$ 排列**, 当 $r = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ 时称作 $S$ 的**全排列**, 或简称为 $S$ 的**排列**.
- (2) 从多重集 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 中**无序选取**的 $r$ 个元素称为 $S$ 的一个 **$r$ 组合**.

**例** 多重集 $S_1 = \{2 \cdot a, 1 \cdot b, 3 \cdot c\}$ , 则 $acab, abcc$ 是 $S_1$ 的4排列,  $abccca$ 是 $S_1$ 的排列. 多重集 $S_2 = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$ , 则 $aa, ab, ac, bb, ba, bc, cc, cb, ca$ 等都是 $S_2$ 的2排列.



# 多重集的计数公式

## 定理 11.2 (1)

设  $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$  是多重集, 若对一切  $i = 1, 2, \dots, k$ , 有  $n_i \geq r$ , 则  $S$  的  $r$  排列数为  $k^r$ .

## 证明

每个元素的重复度至少是  $r$ , 所构造  $S$  的  $r$  排列时每个元素在每个位置都可以出现, 所以每个位置都  $k$  种选法. 根据乘法法则, 不同的  $r$  排列有  $k^r$  个.



# 多重集的计数公式

## 定理 11.2 (2)

设  $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$  是多重集, 若  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , 则  $S$  的全排列数为  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ , 简记为  $\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k}$ .

**证明** 分步处理.

- $S$  的全排列中共有  $n$  个位置, 选其中的  $n_1$  个位置放  $a_1$ , 有  $C(n, n_1)$  种方法.
- 在剩下的  $n - n_1$  个位置中放  $n_2$  个  $a_2$ , 有  $C(n - n_1, n_2)$  种方法.
- 以此类推, 在放  $a_i$  时, 还剩下  $n - n_1 - n_2 - \dots - n_{i-1}$  个位置, 在其中放  $n_i$  个  $a_i$ , 有  $C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{i-1}, n_i)$  种方法.
- 最后, 根据乘法法则有

$$\begin{aligned} & C(n, n_1)C(n - n_1, n_2) \dots C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}, n_k) \\ &= \frac{n!}{(n - n_1)! n_1!} \frac{(n - n_1)!}{(n - n_1 - n_2)! n_2!} \dots \frac{(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1})!}{0! n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \end{aligned}$$



## 多重集的计数公式

**例 11.5** 用多重集 $\{1,1,2,3,3,4\}$ 中的数字能构成多少个不同的四位数?

**解** 所求的4位数是多重集 $S = \{2 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 1 \cdot 4\}$ 的4排列. 分两步计数 $S$ 的4排列数. 先给出 $S$ 的所有4组合, 再对每个4组合求它的全排列.

$S$ 的4组合列出如下:

$$A = \{1,1,2,3\}, B = \{1,1,2,4\}, C = \{1,1,3,3\}, D = \{1,1,3,4\}, \\ E = \{1,2,3,3\}, F = \{1,2,3,4\}, G = \{1,3,3,4\}, H = \{2,3,3,4\}.$$

由定理11.2,  $A, B, D, E, G, H$ 的全排列数都是 $4!/(1! 1! 2!) = 12$ ,  $C$ 的全排列数为 $4!/(2! 2!) = 6$ ,  $F$ 的全排列数为 $4!/(1! 1! 1! 1!) = 24$ . 根据加法法则 $12 \times 6 + 6 + 23 = 102$ .

■ 为什么不在 $S$ 上直接用定理11.2呢?



# 多重集的计数公式

## 定理 11.3

设多重集  $S = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_k\}$ , 则  $S$  的  $r$  组合数为  $C(k + r - 1, r)$ .

## 证明

$S$  的  $r$  组合数其实刚好等于方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$  的非负整数解  $x_1, x_2, \dots, x_k$  的个数. 针对每个解, 可以构造如下01序列:

$$\underbrace{1 \dots 1}_{x_1 \text{ 个 } 1} \quad \underbrace{0}_{\text{第 } 1 \text{ 个 } 0} \quad \underbrace{1 \dots 1}_{x_2 \text{ 个 } 1} \quad \underbrace{0}_{\text{第 } 2 \text{ 个 } 0} \quad \dots \quad \underbrace{0}_{\text{第 } k-1 \text{ 个 } 0} \quad \underbrace{1 \dots 1}_{x_k \text{ 个 } 1}$$

上述序列中的0把共计  $r$  个1划分成  $k$  组. 该01序列的全排列数就是非负整数解的个数, 也就是  $\{(k-1) \cdot 0, r \cdot 1\}$  的全排列数, 根据定理11.2有

$$\frac{(k-1+r)!}{(k-1)!r!} = C(k+r-1, r).$$



# 课堂练习

由 $m$ 个 $A$ 和 $n$ 个 $B$ 构成序列, 其中 $m, n$ 为正整数,  $m \leq n$ . 如果要求每个 $A$ 后面至少跟着1个 $B$ , 问有多少个不同的序列?

## 课堂练习

由 $m$ 个 $A$ 和 $n$ 个 $B$ 构成序列, 其中 $m, n$ 为正整数,  $m \leq n$ . 如果要求每个 $A$ 后面至少跟着1个 $B$ , 问有多少个不同的序列?

**解1** 先把 $AB$ 捆绑, 放 $m$ 个 $AB$ , 只有一种方法. 然后在任两个 $AB$ 之间以及最前和最后的 $m + 1$ 个空格中放置 $n - m$ 个 $B$ . 每个位置都能放任意个 $B$ , 等价于多重集 $S = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_{m+1}\}$ 的 $n - m$ 组合数 $C(m + 1 + n - m - 1, n - m) = C(n, m)$ .

**解2** 先放 $n$ 个 $B$ , 只有一种方法. 然后在任两个 $B$ 之间以及第一个 $B$ 之前的 $n$ 个空格中选择 $m$ 个位置放 $A$ , 于是所求序列数是 $C(n, m)$ .





## 11.2 二项式定理与多项式定理

# 二项式系数

## 定义

组合数  $C(n, k)$  也叫做二项式系数, 可记作  $\binom{n}{k}$ .

- 关于组合数的公式不难证明以下结果:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, n, k \in \mathbf{N}, n \geq k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}, n, k \in \mathbf{Z}^+, n \geq k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, n, k \in \mathbf{N}, n > k$$



# 二项式定理

## 定理 11.4 (二项式定理)

设 $n$ 是正整数, 对一切 $x$ 和 $y$ 有

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

二项式系数有几个重要的恒等式 (书里还有更多):

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, n \in \mathbf{Z}^+.$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0, n \in \mathbf{Z}^+.$$



# 多项式定理

## 定理 11.5 (多项式定理)

设 $n$ 是正整数, 对一切实数 $x_1, x_2, \dots, x_k$ 有

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k},$$

其中求和是对满足方程 $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ 的一切非负整数 $n_1, n_2, \dots, n_k$ .



# 多项式定理

## 证明

$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$  展开后是  $k^n$  个项 (包括相同项), 每项都是  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$  的形式, 其中  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ .

为构成  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ , 需要在  $n$  中选  $n_1$  个  $x_1$ , 然后在剩下的  $n - n_1$  中选  $n_2$  个  $x_2$ , 以此类推最后在  $n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}$  中选择  $n_k$  个  $x_k$ .

因此  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$  的系数是

$$\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_k}$$



# 多项式系数

- 二项式定理是多项式定理 $k = 2$ 时的特殊情况. 类似于二项式系数, 可以把多项式定理中的系数 $\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k}$ 叫做**多项式系数**.
- 二项式系数是组合数 $C(n, k)$ , 而多项式系数是多重集 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 的全排列数.

**例 11.6** 求 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中 $x_1^3 x_2 x_3^2$ 项的系数.

**解**

$$\binom{6}{3 \cdot 1 \cdot 2} \cdot 2^3 \cdot (-3) \cdot 5^2 = \frac{6! \cdot 8 \cdot (-3) \cdot 25}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = -36000.$$



# 作业

- 与下一章一起做.



# 谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论

